Relaciones | MRC

Víctor Peinado (v.peinado@filol.ucm.es)

17 de octubre de 2014

Referencias

- (Partee, *et al.*, 1990, chap. 2) [1]
- Wikipedia: Producto cartesiano [2]
- Wikipedia: Relación matemática [3]

[1] Partee, B.; ter Meulen, A.; Wall, R. *Mathematical Methods in Linguistics* Studies in Linguistics and Philosophy. Springer. 1990. `http://books.google.es/books?id=qV7TUuaYcUIC`

[2] Producto cartesiano `http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_cartesiano`

[3] Relación matemática `http://es.wikipedia.org/wiki/Relaci/%C3/%B3n_matem/%C3/%A1tica`

Pares ordenados

En los cojuntos que hemos visto hasta ahora no existe ningún tipo de orden entre sus miembros. Sin embargo, podemos utilizar conjuntos ordinarios para definir un **par ordenado**.

Los pares ordenados se escriben (a, b) y en ellos el elemento a se considera el primero y b se considera el segundo. Los pares ordenados se definen del siguiente modo:

$$(a, b) =_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

El primer elemento del par (a, b) es el único elemento del conjunto unitario $\{a\}$, mientras que el segundo elemento del par es el elemento del conjunto $\{a, b\}$ que no es miembro de $\{a\}$.

Pares ordenados y n-tuplas

Estos pares son ordenados, lo que implica que, en general, $(a, b) \neq (b, a)$.

¿Por qué digo *en general*? Porque $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{b\}, \{b, a\}\}$ si y solo si $a = b$.

La definición de pares ordenados se puede extender para definir tripletas ordenadas o cualquier tupla de longitud n.

$$(a, b, c) =_{def} ((a, b), c)$$

De un modo similar, podemos generalizar y definir la tripleta (a, b, c) como:

$$(a, b, c) =_{def} \{< a, b > \mid a \in A, b \in B\}$$

Producto cartesiano

Si tenemos dos conjuntos A y B, podemos formar pares ordenados tomando un elemento de A como primer miembro del par y un elemento de B como segundo miembro. El **producto cartesiano** de

A y B, escrito $A \times B$ es el conjunto formado por todos estos pares. La definición de producto cartesiano es:

$$A \times B =_{def} \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$$

Veamos algunos ejemplos. Sean $K = \{a,b,c\}$ y $L = \{1,2\}$:

El número total de pares ordenados que tiene un producto cartesiano se calcula multiplicando las cardinalidades de los conjuntos. En este caso $|K| = 3$ y $|L| = 2$, $3 \times 2 = 6$ pares ordenados.

$$K \times L = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$L \times K = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$L \times L = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Por definición, el producto cartesiano de cualquier conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío.

$K \times \varnothing = \varnothing$

Relaciones

Tenemos una idea intuitiva de la definición de **relación** como la clase de conexión que se establece (o que no se establece) entre objetos. Por ejemplo, la relación *progenitor* se establece entre una madre o un padre y cualquiera de sus hijos, pero no entre un hijo y otro.

Los verbos transitivos son un ejemplo claro que encontramos en las lenguas naturales de conexiones entre diferentes entidades que pueden equipararse a relaciones. Cuando usamos el verbo *comer* de manera transitiva, podemos entender un tipo de relación que se establece entre pares de objetos, la primera realiza la acción y la segunda es comida: *Juan come manzanas*.

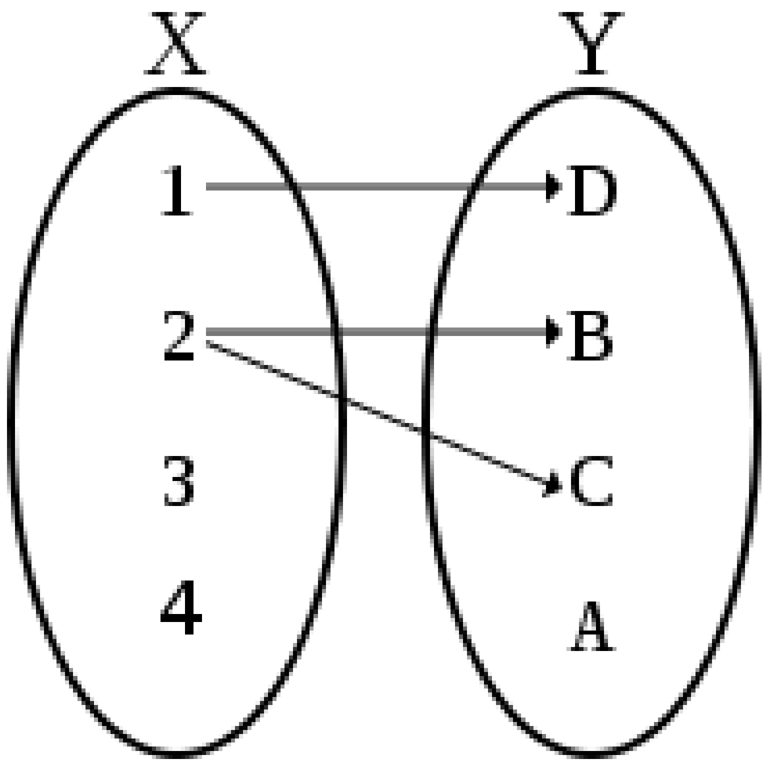
Desde el punto de vista matemático, vamos a definir relación como una operación realizada sobre conjuntos que nos permite vincular un elemento de un conjunto con otro elemento del mismo conjunto o de uno diferente. Y escribimos Rab o aRb para denotar la relación R que se establece entre los elementos a y b.

También podemos escribir $R \subseteq A \times B$ para denotar una relación que se establece entre los elementos del conjunto A y el conjunto B, o mejor, una relación desde A a B.

¡Ojo! Una relación R desde A hasta B puede entenderse como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

En toda relación $R : A \to B$, los conjuntos A y B involucrados reciben nombres especiales. Llamamos **dominio** a los elementos de A, y **rango** a los elementos de B.

La relación R entre los conjuntos X y Y se denota como $R : X \to Y$ y puede representarese gráficamente a través de diagramas de Venn y flechas.



El dominio se corresponde con el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y el rango como el conjunto $Y = \{A, B, C, D\}$. Las flechas representan la relación $R = \{(1, D), (2, B), (2, C)\}$.

En una relación, podemos encontrar un elemento del dominio con más de un elemento del rango.

A continuación, imaginemos una relación a la que podamos dar una semántica fácil de interpretar. Imaginemos un conjuto H que contiene a todos los habitantes del planeta. Pensemos en una relación cuya semántica podemos verbalizar en lenguaje natural como *es madre de*. Pues bien, podemos definir una relación sobre el conjunto de los seres humanos $R : H \to H$ como un conjunto de pares ordenados sobre los elementos de H, de manera que el primer elemento de cada par sea una madre, y el segundo elemento del par sea un padre.

Recuerda que esta relación es un subconjunto extricto del producto cartesiano $R \subset H \times H$. Todo el mundo tiene madre, por lo tanto todos los miembros del rango apareceran representados como segundos miembros del par. Pero no todos los miembros de H son madres. Mi madre tiene una única madre pero tres hijos, por lo tanto:

- aparecerá como segundo elemento de un par: (mi abuela, mi madre); y
- aparecerá como primer elemento en tres pares distintos: (mi madre, mi hermana), (mi madre, mi hermano), (mi madre, yo)

Complemento de una relación

El **complemento de una relación** $R \subseteq AxB$, escrito R', está formado por todos los pares ordenados del producto cartesiano $A \times B$ que no están incluídos en la relación R. Formalmente, se define como:

$$R' =_{def} (A \times B) - R$$

Por lo tanto, el complemento de R contienen todos los pares ordenados del producto cartesiano que no son miembros de R.

Por cierto, como hemos visto con otros conjuntos, $(R')' = R$.

Inverso de una relación

El **inverso de una relación** $R \subseteq AxB$, escrito R^{-1}, está formado por todos los pares ordenados que son elementos de R, pero con el orden de los elementos invertido.

Sea $A = \{1,2,3\}$ y sea R la relación *es mayor que* tal que $R \subseteq AxA = \{(3,2),(3,1),(2,1)\}$.

El inverso de R, $R^{-1} = \{(2,3),(1,3),(1,2)\}$. Podemos expresar en lenguaje natural el significado de esta nueva relación como *es menor que*.

El complemento de R, $R' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$, y podemos expresar en lenguaje natural el significado como *es menor o igual que*.

Si $R \subseteq AxB$, entonces $R^{-1} \subseteq BxA$, pero $R' \subseteq AxB$.

Ejercicios

Ejercicio 1 de (Partee, *et al.*, 1990, chap. 2).